negado gramaticalmente: “no x” y se denota $\bar{x}$.

Observación: Es importante tener claro que cuando x es verdadero $\bar{x}$ es falso, y viceversa, así, por ejemplo el complemento de “todo” no es “ninguno”, sino “al menos uno no”

4.3.- TEOREMAS DEL ALGEBRA BOOLEANA

A continuación se presenta un conjunto de resultados fundamentales; pero basados en los postulados del 1 al 6 presentados en la sección 4.1 y que por lo tanto son válidos para cualquier álgebra de Boole. Estos resultados son presentados a manera de Teoremas y junto con los seis postulados representan *las reglas del juego* para cualquiera que desee trabajar con el álgebra booleana.

La manera de demostrar los teoremas siguientes se puede basar en ideas intuitivas producto de la familiaridad con algún álgebra booleana en particular, (en diagramas de Venn, o bien, en circuitos con switches o en tablas de verdad) con la única condición de que se respete al pie de la letra los 6 postulados fundamentales. En estas notas sólo se usan razonamientos basados en los seis postulados.

Antes de presentar los teoremas es conveniente mencionar el siguiente principio que se deriva directamente de la manera en que fueron presentados los seis postulados fundamentales, es decir, del hecho de que cada postulado tiene dos incisos los cuales son ***duales*** uno del otro.

Principio de Dualidad. Si una expresión booleana es verdadera, su ***expresión dual*** también lo es.

Expresiones duales. Dos expresiones se dicen duales una de la otra, si una se puede obtener de la otra cambiando las operaciones (+) por ( ) y viceversa y cambiando los O's por 1 's y viceversa.

Ejemplo.
La expresión A + B = 1 es dual de la expresión A B = O,
Todas las expresiones de los incisos (a) de los postulados del álgebra booleana son duales de las exprsiones de los incisos (b) correspondientes.

> De aquí en adelante, de acuerdo al principio de dualidad demostrar sólo un inciso de los siguientes teoremas y automáticamente el inciso dual quedará demostrado.

Teorema 1. Multiplicación por cero

a) A 0 = 0
b) A+1 = 1

Demostración del inciso (a)

	Explicación:
A 0 = A 0 + 0	*0 es el neutro de la suma*
= A 0 + A $\bar{A}$	*el producto de una variable por su complemento da 0*
= A (0 + $\bar{A}$)	*distributividad*
= A ($\bar{A}$)	*una variable más el neutro no se altera*
= 0	*una variable por su complemento da 0*

> **Notación**. De aquí en adelante, el símbolo de multiplicación ( ) se omitirá en ocaciones por comodidad, así por ejemplo A B se escribirá AB, o bien, (A+B) (C+D) se escribirá (A+B)(C+D) siendo diferente de A+B C+D, lo cual se escribirá A+BC+D.

Teorema 2. Absorción

a) A + AB = A
b) A(A + B) = A

Demostrando el inciso (a)

		Explicación:
A + AB	= A 1 + AB	*1 es el neutro del producto*
	= A(1 + B)	*distributividad*
	= A(1)	*Teorema 1*
	= A	*es el neutro del producto*

este teorema se puede usar en diversos casos de simplificación, basta con usar identificar en una suma, una expresión que se repite primero en forma aislada y luego multiplicando a otra expresión.

Ejemplos.

La expresión XY + XYZ por absorción es igual a XY
La expresión $\bar{A}$+ $\bar{A}$B por absorción es igual con $\bar{A}$
etc.

Teorema 3. **Cancelación**

a) A + $\bar{A}$B = A + B
b) A($\bar{A}$ + B) = A B

Demostración del inciso (a)

		Explicación:
A + $\bar{A}$B	= (A+$\bar{A}$)(A+B)	*distributividad*
	= 1 (A+B)	*la suma de una variable con su complemento es 1*
	= A+B	*1 es el neutro del Producto*

Este teorema se puede usar en la simplificación de expresiones cuando encontramos una expresión sumada Con su complemento multiplicado por otra expresión (o el dual).

Ejemplos:

La expresión A + $\bar{A}$BC por cancelación es igual a A + BC
La expresión $\bar{A}$ + AB por cancelación es igual a $\bar{A}$ + B
La expresión XY + $\overline{XY}$ Z por cancelación es igual a XY + Z

Teorema 4. Cancelación

a) AB + $\bar{A}$B = B
b) (A+B)($\bar{A}$+B)=B

Demostración del inciso (a)

		Explicación:
AB + $\bar{A}$B	= (A+$\bar{A}$)B	*distributividad*
	= 1 B	*la suma de una variable con su complemento es 1*
	= B	*1 es el neutro del producto*

Para usar este resultado hay que identificar dos términos que tienen un factor común y el término que no es común en una de ellas es el complemento del de la otra.

Ejemplos:

La expresión $\bar{A}$BC+ABC, por cancelación es igual a BC
La expresión XYZ+$\overline{XY}$ Z, por cancelación es igual a Z

Teorema 5. Idempotencia

a) A A = A
b\ A+A= A

La demostración del inciso (b) de este teorema es inmediata del teorema de absorción, ya que A + A = A+ A 1.

Este teorema implica que cuando existen ***términos semejantes*** en una expresión, basta con escribir uno de ellos, o bien, que un término puede "desdoblarse" tantas veces como se quiera. Obsérvese que también esto implica que $A^n = A$ para cualquier número n entero positivo.

Ejemplos:

La expresión (X+Y)(X+Y) por idempotencia es igual a X+Y
La expresión XYZXYX por idempotencia es igual a XYZ
La expresión XY+Z+ XY por idempotencia es igual a XY+Z

Teorema 6. Consenso

a) $AB + \bar{A}C + BC = AB + \bar{A}C$
b) $(A+B)(\bar{A}+C)(B+C) = (A+B)(\bar{A}+C)$

Demostración del inciso (a)

		Explicación:
$AB + \bar{A}C + BC$	$= AB + \bar{A}C + BC(A + \bar{A})$	*$A+\bar{A}$ es el neutro de la multiplicación*
	$= AB + \bar{A}C + ABC + \bar{A}BC$	*distributividad*
	$= (AB + ABC) + \bar{A}C + \bar{A}BC)$	*conmutatividad y asociatividad*
	$= AB + \bar{A}C$	*absorción*

La clave para usar este teorema es encontrar dos términos que contengan una expresión en uno afirmada y en otro negada, anotar los términos con los que están multiplicando uno y otro y buscar otro elemento que sea la multiplicación de estos últimos dos, éste último elemento es el que se puede eliminar.

Ejemplos:

La expresión $\bar{A}B + AC + BC$ por consenso es igual a $\bar{A}B + AC$
La expresión $XYZ + \overline{XY}W + ZW$ por consenso es igual a $XYZ + \overline{XY}W$

Teorema 7. Teorema de De Morgan

a) $\overline{AB} = \bar{A}+\bar{B}$
b) $\overline{A+B} = \bar{A}\bar{B}$

Demostración del inciso (a): Para demostrar este teorema hay que recordar las dos propiedades que cumple el complemento $\bar{X}$ de una expresión X, es decir:

i) $\bar{X} + X = 1$ (sumados nos da uno)
ii) $\bar{X}\ X = 0$ (multiplicados nos da cero)

Así, para demostrar el inciso (a) se demostrará que $\bar{A}+\bar{B}$ es el complemento de A.B, para ello se hará en dos partes:

i) sumando:

		Explicación:
$AB + (\bar{A} + \bar{B})$	$= AB + \bar{B} + \bar{A}$	*por conmutatividad*
	$= A + \bar{B} + \bar{A}$	*por cancelación*
	$= 1 + \bar{B}$	*propiedad del complemento*
	$= 1$	*por Teorema 1*

ii) multiplicando

		Explicación:
$A\ B\ (\bar{A} + \bar{B})$	$= \underline{AB}\bar{A} + AB\bar{B}$	*Por distributividad*
	$= 0 + 0$	*propiedad del complemento*
	$= 0$	*idempotencia*

El teorema de De Morgan se puede generalizar al caso de más de dos variables booleanas, por ejemplo, para 3 variables, tenemos que $\overline{A+B+C} = (\overline{A+B})\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$, en forma similar, $\overline{A\bullet B\bullet C} = (\overline{A\bullet B})+\overline{C} = \overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$, y así sucesivamente para más de tres variables.

Otros teoremas: A continuación se presentan dos teoremas más sin demostración, es un buen ejercicio el intentar dicha demostración.

Teorema 8. Involución

a) $\overline{\overline{A}}=A$

Teorema 9. Complementos de los neutros

a) $\overline{0} = 1$
b) $\overline{1} = 0$

4.3.1.- Ejemplos de simplificación de expresiones booleanas

Los 6 postulados fundamentales, junto con los teoremas anteriores conforman las herramientas básicas de simplificación y manipulación de expresiones booleanas, a continuación se ilustra su uso con algunos ejemplos.

Ejemplo. Simplificar las siguientes expresiones

1.- A(BC + AC) + BC Distribuyendo el factor A en el paréntesis:
= ABC + AAC + BC, conmutando y aplicando idempotencia:
= ABC + BC + AC, usando absorción:
= BC +AC

2.- $\overline{\overline{XY}Z+XZ}$ Usando el Teorema de De Morgan:
= $\overline{\overline{XY}Z}\bullet\overline{XZ}$, por De Morgan nuevamente e involución:
= $(XY+\overline{Z})(\overline{X}+\overline{Z})$, distribuyendo:
=$XY\overline{X}+XY\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Z}+\overline{Z}\,\overline{Z}$, como $X\overline{X}$ es cero, y por idempotencia:
= $0+XY\overline{Z}+\overline{X}\,\overline{Z}+\overline{Z}$, por absorción:
= $\overline{Z}$

3.- $\overline{(\overline{X+Y}+YZW)}\,\overline{XY}$ Por el teorema de De Morgan:
= $((X+Y)\,\overline{YZW})\,\overline{XY}$, nuevamente:
= $(X+Y)\,(\overline{Y}+\overline{Z}+\overline{W})\,(\overline{X}+\overline{Y})$, distribuyendo el primero con el tercer factor:
= $(X\overline{Y}+\overline{X}Y)\,(\overline{Y}+\overline{Z}+\overline{W})$, distribuyendo nuevamente
= $(X\overline{Y}+X\overline{Y}\overline{Z}+XY\overline{W}+\overline{X}YZ+\overline{X}YW$, por absorción:
=$(X\overline{Y}+\overline{X}YZ+\overline{X}YW)$.

4.4.- FUNCIONES BOOLEANAS

En forma similar a como se define en los cursos de álgebra de números reales, es posible definir una relación de dependencia de una ***variable booleana o variable lógica*** con otras variables booleanas independientes. Es decir, es posible definir ***funciones booleanas o funciones lógicas***.

Definición. Sean $X_1,X_2,...,X_n$, variables booleanas, es decir, variables que pueden tomar el valor de 0 o de 1, entonces la expresión

$$Y = f(X_1,X_2,...,X_n)$$

denota una dependencia funcional de la variable dependiente Y respecto a las variables independientes